Uvod u numeričku matematiku
vježbe

školska godina 2002/2003.

April 13, 2004

Contents

1 Uvodni dio

1.1 Prikazivanje brojeva u računalu

Neka je β baza brojenog sustava koje koristi računalo. Neki realni broj x, $x \neq 0$, prikazujemo u računalu u obliku:

$$x = \sigma(.a_1 a_2 \dots a_t)_\beta \cdot \beta^e,$$

gdje je

- $\sigma = \pm 1$ - *predznak*,
- $0 \leq a_i \leq \beta - 1$, $(.a_1 a_2 \dots a_t)_\beta$ nazivamo *mantisa*
- t - broj mjesta za prikaz mantise.
- $e \in \mathbf{Z}$ - *eksponent.*

Broj x je zapisan u *normaliziranom obliku* ako je $a_1 \neq 0$.

Pretpostavimo da je $e_{min} \leq e \leq e_{max}$. Time je odreden raspon prikazivih brojeva u računalu.

- Najmanji prikazivi broj je
$$x_{min} = (.10 \dots 0)_\beta \beta^{e_{min}} = \beta^{e_{min}-1} > 0.$$
- Najveći prikazivi broj je, uz oznaku $\gamma = \beta - 1$,
$$x_{max} = (.\gamma\gamma \dots \gamma)_\beta \beta^{e_{max}}.$$
- Nula se prikazuje sa
$$0.1 \cdot \beta^{e_{min}-1} > 0.$$

Neka $fl(x)$ označava reprezentaciju nekog broja x u računalu. Ako je prikaz broja x u bazi β dan sa

$$x = \sigma(.a_1 a_2 \dots a_t a_{t+1} \dots)_\beta \cdot \beta^e,$$

uz pretpostavke da je $a_1 \neq 0$ i $e_{min} \leq e \leq e_{max}$, tada $fl(x)$ možemo odrediti na dva načina:

- *metoda rezanja*:
$$fl(x) = \sigma(.a_1 a_2 \dots a_t)_\beta \cdot \beta^e,$$
- *metoda zaokruživanja*:
$$fl(x) = \begin{cases} \sigma(.a_1 a_2 \dots a_t)_\beta \cdot \beta^e, & 0 \leq a_{t+1} < \beta/2 \\ \sigma[(.a_1 a_2 \dots a_t)_\beta + (.0 \dots 01)_\beta] \cdot \beta^e, & \beta/2 \leq a_{t+1} < \beta. \end{cases}$$

Mi ćemo koristiti gornju definiciju za zaokruživanje brojeva. U praksi se za granični slučaj kada je $a_{t+1} = \beta/2$ i $a_j = 0$, za $j \geq t+2$, koristi takozvano *zaokruživanje na parno.* Pri zaokruživanju na parno zaokružujemo na više ako je a_t neparan (npr. 3.5 zaokružujemo na 4), odnosno na niže ako je a_t paran (2.5 zaokružujemo na 2).

Općenito je $fl(x) \neq x$, stoga moramo promatrati koliku pogrešku napravimo prikazujući broj u računalu. Imamo dvije vrste grešaka:

- *apsolutnu pogrešku* - $|x - fl(x)|$
- *relativnu pogrešku* - $\varepsilon = |(x - fl(x))/x|$

Vrijede slijedeće tvrdnje

1. ako $fl(x)$ dobijemo metodom rezanja tada je
$$0 \leq \varepsilon \leq \beta^{-t+1},$$
2. ako $fl(x)$ dobijemo metodom zaokruživanja tada je
$$-\beta^{-t+1}/2 \leq \varepsilon \leq \beta^{-t+1}/2.$$

1.2 Točnost prikaza realnih brojeva

Kažemo da je δ *točnost stroja* ako vrijedi:

- $\delta > 0$, realan broj,
- δ je najmanji broj sa svojstvom da je $fl(1+\delta) > 1$.

Iz definicije točnosti stroja slijedi da za bilo koji $0 < \delta_1 < \delta$ vrijedi $fl(1+\delta_1) = 1$, tj. u računalu su brojevi $1 + \delta_1$ i 1 predstavljaju isti broj.

Točnost stroja je definirana sa
$$\delta = \begin{cases} \beta^{-t+1}, & \text{ako se } fl(x) \text{ definira metodom rezanja,} \\ \beta^{-t+1}/2, & \text{ako se } fl(x) \text{ definira metodom zaokruživanja.} \end{cases}$$

Prilikom računanja može se dogoditi da rezultat operacije x izađe iz opsega prikazivih brojeva. Pri tome razlikujemo dva slučaja:

- $|x| > x_{max}$, kažemo da je nastupio *overflow.* Računalo najčešće javlja pogrešku i zaustavlja rad programa,
- $0 < |x| < x_{min}$, kažemo da je nastupio *underflow.* Računalo najčešće postavlja $fl(x)$ na 0 i nastavlja rad programa.

Neka je $\beta = 10$, $x_p = (.a_1 \ldots a_t \ldots)_\beta \beta^e$ prava vrijednost i $x_a = (.b_1 \ldots b_t \ldots)_\beta \beta^e$ aproksimativna vrijednost. Kažemo da x_a ima m *značajnih znamenaka* ako za apsolutnu pogrešku vrijedi
$$|x_p - x_a| \leq \beta/2 \cdot \beta^{e-m-1}.$$

Primjeri:

- a) $x_p = 1/3$, $x_a = 8.333$, $|x_p - x_a| = 0.00033\ldots$. Kako je pogceška manja od 5 u 4. znamenci vidimo da x_a ima 3 značajne znamenke.

- b) $x_p = 23.436$, $x_a = 23.494$, $|x_p - x_a| = 0.062$. U normaliziranom obliku je $x_p = 0.23476 \cdot 10^2$, $x_a = 0.23494 \cdot 10^2$ i $|x_p - x_a| = 0.8 \cdot 10^{-2}$. Kako je $e = 2$ i $|x_p - x_a| \leq 5 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{2-4-1}$, zaključujemo da je $m = 4$, odnosno da imamo 4 značajne znamenke.

- c) $x_p = 0.02138$, $x_a = 0.02144$, $|x_p - x_a| = 0.00006$. U normaliziranom obliku je $x_p = 0.2318 \cdot 10^{-1}$, $x_a = 0.2144 \cdot 10^{-1}$ i $|x_p - x_a| = 0.6 \cdot 12^{-4}$. Kako je $e = -1$ i $|x_p - x_a| \leq 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-1-2-1}$, zaključujemo da je $m = 2$, odnosno da imamo 2 značajne znamenke.

Za računanje značajnih znamenki ponekad se koristi i relativna pogreška: ako je

$$|(x_p - x_a)/x_p| \leq 5 \cdot 10^{-m-1}$$

onda x_a ima m *značajnih znamenaka s obzirom* na x_p. Uvjet da x_a ima m značajnih znamenaka s obzirom na x_p je samo dovoljan, ali ne i nužan uvjet da x_a ima m značajnih znamenki. Pogledajmo to na primjerima a) i b).

- U primjeru a) je

  $$|(x_p - x_a)/x_p| \approx 9.99 \cdot 10^{-4} \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

  iz čega slijedi da je $m = 2$, ali smo već prije vidjeli da je $m = 3$.

- u primjeru b) je

  $$|(x_p - x_a)/x_p| = 8.512087164 \cdot 10^{-5} \leq 5 \cdot 10^{-4}$$

  iz čega slijedi da je $m = 3$, ali smo već prije vidjeli da je $m = 4$.

1.3 Prikaz brojeva u IEEE standardu

Jedan od najpoznatijih standarda za prikaz brojeva u računalu je IEEE standard. Osim što omogućuje prikaz realnih brojeva, sadrži i prikaz nekih vrijednosti koje nisu numeričkog tipa. Tako ćemo u slučaju da pri računanju nekog aritmetičkog izraza nastupi overflow dobiti kao rezultat +INF ili -INF, koji simboliziraju $\pm\infty$. Ako pokušamo izvaditi logaritam iz negativnog broja ili probamo izračunati izraz oblika 0/0 dobiti ćemo rezultat NaN (not a number), a program se neće zaustaviti.

U slijedećoj tablici dajemo prikaz brojeva prema IEEE standardu. Općenito se prikaz broja x sastoji od uređene trojke σ,m i e (predznak, mantisa i eksponent).

Eksponent (e)	Mantisa (m)	Vrijednost
$e_{min} \leq e \leq e_{max}$	bilo što	$\sigma \cdot 1.m \cdot 2^e$
$e = e_{min} - 1$	$m = 0$	$\sigma \cdot 0(\pm 0)$
$e = e_{min} - 1$	$m \neq 0$	$\sigma \cdot 0.m$
$e = e_{max} + 1$	$m = 0$	σ INF ($\pm$ INF)
$e = e_{max} + 1$	$m \neq 0$	NaN

Prikaz broja može biti u dvije točnosti, *jednostrukoj (single)* i *dvostrukoj (double)*, koje se razlikuju po broju mjesta koje se koriste za prikaz broja. Osnovni podaci za obje točnosti dani su u slijedećoj tablici.

	Jednostruka	Dvostruka
broj bitova za predznak	1	1
broj bitova za mantisu	23	52
broj bitova za eksponent	8	11
ukupno bitova za prikaz	32	64
e_{min}	-126	-1022
e_{max}	127	1023

Aproksimacija funkcija

Motivacija: Treba računati vrijednost funkcije f u nizu točaka $x \in [a,b]$, no računanje $f(x)$ traje dugo. Ako nam nije potrebna prevelika točnost, onda je neracionalno potrošiti kompjutersko vrijeme na računanje točnih vrijednosti (npr. ako računamo dimenzije potrebne u strojarstvu koje su dane u milimetrima, stvarno nije potrebno pretjerivati u broju točnih decimala). Stoga je ideja da funkciju f zamijenimo nekom funkcijom g koja je bliska f na $[a,b]$ i koja se lako računa. Kažemo da je g *aproksimacija* funkcije f.

Prilikom apoksimacija možemo koristiti nekoliko kriterija. Mi ćemo napraviti dva: kriterij interpolacije i kriterij najmanjih kvadrata.

Za aproksimaciju se često koriste slijedeće funkcije:

- polinomi
- po dijelovima polinomi (splineovi)
- racionalne funkcije
- trigonometrijski polinomi ($\sin(nx)$, $\cos(nx)$, Fourierovi redovi).

2 Interpolacija polinomom

Polinomi su izrazito pogodni za računanje zbog Hornerove sheme, algoritma koji omogućuje brzo računanje polinoma u točki. Neka nam je zadan polinom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Hornerova shema dana je slijedećim algoritmom:

Algoritam: Hornerova shema

$s = a_n$
<u>**za**</u> $i = n-1, \ldots, 0$ <u>**radi**</u>
    $s = s \cdot x + a_i$
<u>**kraj**</u>
$p(x) = s$

U Hornerovoj shemi za računanje vrijednosti polinoma u jednoj točki trebamo ukupno n množenja i n zbrajanja.

Objasnimo sada što je kriterij interpolacije. Funkciju g određujemo tako da se njene vrijednosti poklapaju s vrijednostima funkcije f u nekim točkama $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, tj. vrijedi $g(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Broj točaka se bira tako da se funkcija g može jedinstveno odrediti. Primjetimo da smo ovdje prvo odredili prostor iz kojeg funkcija g dolazi (npr. prostor polinoma stupnja 4), a tek onda odredili broj i razmještaj točaka x_i.

U praksi je čest i slučaj kada imamo zadan niz točaka (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, koje mogu predstavljati rezultate nekog mjerenja, i mi želimo naći funkciju g koji prolazi kroz sve te točke, tj. zadovoljava $g(x_i) = y_i$.

Znamo da za određivanje polinoma stupnja n trebamo imati $n+1$ nezavisan uvjet pa se problem interpolacije polinomom definira na slijedeći način:

Problem interpolacije polinomom: *Neka su zadane točke* (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$. *Naći polinom* $p(x) = p_n(x)$ *stupnja* n *uz uvjet da je*

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Ukoliko vrijedi $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, tada interpolacijski polinom postoji i jedinstven je. No, kako u prostoru polinoma postoje različite baze (vidi. Linearna algebra 1,2) postoje različiti prikazi interpolacijskog polinoma. Mi razlikujemo tri prikaza:

- Prikaz u standardnoj bazi
- Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma
- Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

2.1 Prikaz interpolacijskog polinoma u standardnoj bazi

Standardna baza u prostoru polinoma

$$\mathcal{P}_n = \{p : p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_i \in \mathbf{R}\}$$

je dana funkcijama $\{1, x, \ldots, x^n\}$. Problem nalaženja polinoma $p \in \mathcal{P}_n$ koji prolazi kroz točke (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, odnosno njegovih koeficijenata a_i, se svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi

$$p(x_i) = y_i \Leftrightarrow a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_{n-1} x_i^{n-1} + a_n x_i^n = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Jer je determinanta tog sustava Vandermondeova determinanta, koja je uvijek različita od 0, za $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, zaključujemo da je sustav rješiv i da ima jedinstveno rješenje.

Ovaj način nije od neke koristi prilikom rješavanja standardnog problema interpolacije, ali pri nekim egzotičnijim problemima se može jako korisno iskoristiti.

Primjer 1: *Nađite interpolacijski polinom stupnja 2 koji prolazi točkama* $(-1, 3)$, $(1, 5)$ *i* $(2, 0)$.

Rješenje: Tražimo polinom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Za određivanje njegovih koeficijenata trebamo riješiti sustav

$$\begin{array}{lcl} p(-1) = 3 & & a_0 - a_1 + a_2 = 3 \\ p(1) = 5 & \Leftrightarrow & a_0 + a_1 + a_2 = 5 \\ p(2) = 0 & & a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{array}$$

Rješenja danog sustava su

$$a_0 = 6, \quad , a_1 = 1, \quad a_2 = -2,$$

pa je traženi interpolacijski polinom

$$p(x) = 6 + x - 2x^2 .$$

$\triangle$

2.2 Lagrangeov interpolacijski polinom (LIP)

Prethodni postupak je bio problematičan zbog toga što je za određivanje koeficijenata interpolacijskog polinoma bilo potrebno rješiti sustav. Za lakše određivanje interpolacijskog polinoma potrebno je promijeniti bazu prostora $\mathcal{P}_n$.

Neka su nam ponovo zadane točke (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$. Definiramo polinome $l_i \in \mathcal{P}_n$, $i = 0, \ldots, n$, sa

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(x_i)},$$

pri čemu je $\omega(x)$ definiran sa

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

a $\omega_i(x)$ sa

$$\omega_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) = \frac{\omega(x)}{x - x_i}.$$

Za polinome l_i vrijedi

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, \ldots, n,$$

pa polinom p koji rješava problem interpolacije možemo zapisati kao

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

Zadatak 1: *Dokažite da prethodno definirani polinomi l_i, čine bazu za prostor $\mathcal{P}_n$.*

Ovako zapisan p nazivamo *Lagrangeov interpolacijski polinom*, mada bi precizniji naziv bio *Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma*, jer je interpolacijski polinom jedinstven.

Primjer 2: *Nađite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma stupnja 2 koji prolazi točkama $(-1, 3)$, $(1, 5)$ i $(2, 0)$.*

Rješenje: Prvo definiramo polinome l_i. Imamo redom

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^2-3x+2}{6}, \\ l_1(x) &= \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}, \\ l_2(x) &= \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{x^2-1}{3}, \end{aligned}$$

pa je traženi interpolacijski polinom

$$p(x) = 3\frac{x^2-3x+2}{6} + 5\frac{x^2-x-2}{-2} + 0\frac{x^2-1}{3} = 6 + x - 2x^2,$$

što smo već imali. Primjetimo da je najveći problem kod Lagrangeova oblika sporost računanja, osim ako ga ne prebacimo u standardnu bazu, (ili barem polinome l_i prikažemo u standardnoj bazi) △

Zadatak 2: *Odredite broj operacija potreban za računanje vrijednosti Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma u točki x.*

Rješenje: Interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku za točke (x_i, y_i) može se zapisati kao

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(x_i)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Vidimo da o točki x ne ovise koeficijenti

$$A_i = \frac{y_i}{\omega_i(x_i)},$$

pa ih možemo unaprijed izračunati i pamtiti. Koliko nam operacija treba za to? Ukoliko sa A označimo broj aditivnih operacija (zbrajanje i oduzimanje), a sa M broj multiplikativnih operacija (množenje i dijeljenje) tada imamo slijedeću računicu:

- Jer je

  $$\omega_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j),$$

  za računanje $\omega_i(x_i)$ treba nam

  $$\begin{matrix} n \text{ A} \\ (n-1) \text{ M} \end{matrix} \quad \text{operacija}$$

- Za računanje jednog $y_i/\omega_i(x_i)$ treba nam 1 M operacija
- Za računanje svih A_i treba nam ukupno

$$\boxed{\begin{array}{rl} (n+1)n \text{ A} & \\ (n+1)[(n-1)+1] \text{ M} = (n+1)n \text{ M} & \end{array} \quad \text{operacija}}$$

Ako smo zapamtili A_i za računanje $p(x)$ trebamo izračunati

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \omega_i(x).$$

- Za računanje $\omega_i(x)$ trebamo

$$\begin{array}{c} n \text{ A} \\ (n-1) \text{ M} \end{array} \quad \text{operacija,}$$

- za računanje sume

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \omega_i(x).$$

  treba nam još

$$\begin{array}{c} n \text{ A} \\ (n+1) \text{ M} \end{array} \quad \text{operacija,}$$

- sve skupa nam je za računanje $p(x)$ potrebno

$$\boxed{\begin{array}{r} (n+1)n + n \text{ A} = n(n+2) \text{ A} \\ (n+1)(n-1) + (n+1) \text{ M} = n(n+1) \text{ M} \end{array} \quad \text{operacija}}$$

Iz prethodnog zaključujemo da je računanje $p_n(x)$ prema formuli (1) neekonomično jer nam je broj operacija proporcionalan sa kvadratom broja čvorova, čak i ako izuzmemo računanje dijela koji nije ovisan o točki x nego samo o čvorovima x_i.

Koji je razlog neekonomičnosti? Glavni problem leži u tome ťo kad računamo $\omega_i(x)$ neka množenja ponavljamo $n+1$ puta. Stoga ćemo $\omega_i(x)$ zapisati kao

$$\omega_i(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_i},$$

pa se računanje $p_n(x)$ svodi na računanje prema formuli

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(x_i)} = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega_i(x_i)} = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\omega_i(x_i)} \frac{1}{x - x_i} \\ &= \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i}{x - x_i}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Mana gornje formule je što trebamo provjeravati da x nije jedan od čvorova (u tom slučaju imamo dijeljenje s 0).

Za računanje $p(x)$ pomoću formule (2) treba nam (uz pretpostavku da su A_i izračunati već prije)

- 1 A i 1 M operaciju za računanje svakog $A_i/(x-x_i)$,
- n A operacija za zbrajanje svih $A_i/(x-x_i)$,
- n M i $n+1$ A operacija za računanje $\omega(x)$ i
- 1 M operacija za množenje $\omega(x)$ i sume svih $A_i/(x-x_i)$.

Kada se to sve zbroji vidimo da je za računanje $p(x)$ prema formuli (2) potrebno

$$\boxed{\begin{array}{r} n+1+n+n+1 \text{ A} = 3n+2 \text{ A} \\ n+1+n+1 \text{ M} = 2n+2 \text{ M} \end{array} \quad \text{operacija.}}$$

Gornji broj je znatno manji od broja operacija potrebnog za računanje $p(x)$ prema formuli (2).

Ukoliko je i ovo previše operacije kao npr. u slučaju kada treba izračunati $p(x)$ u puno točaka x, tada ćemo p zapisati u standardnoj bazi i računati prema Hornerovoj shemi. △

2.3 Newtonov interpolacijski polinom (NIP)

Neka su nam zadane točke (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$. *Newtonov interpolacijski polinom* (odnosno *Newtonov oblik interpolacijskog polinoma*) za zadane čvorove dan je sa

$$p(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x-x_0)\cdots(x-x_{i-1}).$$

Brojeve $f[x_0, \ldots, x_i]$ nazivamo *podijeljene razlike.*

Primjetimo da je ovdje zapravo riječ o prikazu polinoma iz prostora $\mathcal{P}_n$ u bazi

$$\{1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \ldots, \prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)\}.$$

Zadatak 3: *Dokažite da je skup polinoma*

$$\{1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \ldots, \prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)\}$$

baza u prostoru $\mathcal{P}_n$.

Definicija: *Podijeljena razlika nultog reda u čvoru x_i dana je sa*

$$f[x_i] = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Podijeljena razlika k-tog reda ($k \geq 1$) dobiva se iz podijeljenih razlika $(k-1)$-og reda formulom

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

za $k = 1, \ldots, n$ i $i = 0, \ldots, n-k$.

Podijeljene razlike najlakše određujemo pomoću *tablice podijeljenih razlika.* U donjoj tablici je dan primjer za slučaj $n = 4$

x_i \ k	0	1	2	3	4
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

Primjer 3: *Nađite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma stupnja 2 koji prolazi točkama* $(-1, 3)$*,* $(1, 5)$ *i* $(2, 0)$*.*

Rješenje: Formiramo tablicu podijeljenih razlika:

x_i \ k	0	1	2
-1	3		
		1	
1	5		-2
		-5	
2	0		

pa je interpolacijski polinom dan sa

$$p(x) = 3 + 1 \cdot (x + 1) - 2(x + 1)(x - 1).$$

Primjetimo da Newtonov oblik interpolacijskog polinoma ne moramo prikazivati u standardnoj bazi, jer se računanje i u tom obliku može provesti algoritmom sličnom Hornerovoj shemi, podjednako brzim. $\triangle$

Primjer 4: *Primjetite da u prošlom primjeru smo mogli naći interpolacijski polinom i da smo išli po "donjoj" strani tablice podijeljenih razlika. U tom slučaju bi interpolacijski polinom bio oblika*

$$p(x) = 0 - 5(x - 2) - 2(x - 2)(x - 1).$$

Zadatak 4: *Odredite broj operacija potreban za računanje vrijednosti Newtonovog oblika interpolacijskog polinoma u točki* x*.*

Rješenje: Za računanje vrijednosti Newtonovog interpolacijskog polinoma p u nekoj točki x koristimo algoritam analogan Hornerovom algoritmu.

Algoritam: Hornerova shema za računanje vrijednosti NIP-a

$s = f[x_0, \ldots, x_n]$
za $i = n-1, \ldots, 0$ **radi**
    $s = s(x - x_i) + f[x_0, \ldots, x_i]$
kraj
$p(x) = s$

Gornji algoritam ima $2n$ A i n M operacija što je bolje od oba algoritma za računanje vrijednosti Lagrangeovog interpolacijskog polinoma u točki. Također, gornji algoritam nema problema s računanjem vrijednosti $p_n(x)$ ukoliko je x neki od čvorova.

Kao i brojevi A_i kod Lagrangeovog interpolacijskog polinoma, tako i podijeljene razlike kod Newtonovog interpolacijskog polinoma ne ovise o x, nego samo o zadanim čvorovima.

Da bi izračunali tablicu podijeljenih razlika treba nam 2 A i 1 M operacija za računanje jedne podijeljene razlike k-tog reda ($k \geq 1$). Kako takvih podijeljenih razlika ima $n(n+1)/2$, zaključujemo da nam je za izračunavanje tablice podijeljenih razlika potrebno

$$\boxed{\begin{array}{rc} n(n+1)\ \mathrm{A} & \multirow{2}{*}{operacija,} \\ n(n+1)/2\ \mathrm{M} & \end{array}}$$

što je manje nego za slučaj izračunavanja brojeva A_i kod Lagrangeovog interpolacijskog polinoma. Zaključujemo da je Newtonov oblik interpolacijskog polinoma pogodniji za računanje od Lagrangeovog oblika. △

2.4 Pogreška interpolacije

Kada imamo problem interpolacije u kojima su nam vrijednosti ordinate zadanih točaka rezultati nekih mjerenja, računanje pogreške nema smisla (mada tu može biti zanimljivo gledati neka druga svojstva tako dobijenih polinoma, npr. monotonost ili konveksnost). S druge strane, ako vrijednosti ordinate predstavljaju vrijednosti funkcije f koju aproksimiramo (tj. $y_i = f(x_i)$), onda možemo naći i ocijeniti pogrešku koja nastaje kada funkciju f aproksimiramo njenim intepolacijskim polinomom p.

Neka je $f \in C^{(n+1)}([a,b])$. Funkciju f interpoliramo polinomom $p \in \mathcal{P}_n$, za kojeg vrijedi $p(x_i) = f(x_i)$, gdje su $x_0, x_1, \ldots, x_n$,

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b,$$

neke unaprijed određene točke. Tada je *prava greška* interpolacije u nekoj točki $x \in [x_0, x_n]$ dana sa $e(x) = |f(x) - p(x)|$. Za pravu grešku interpolacije vrijedi

$$|f(x) - p(x)| = \frac{\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|}{(n+1)!} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right|, \quad x, \xi \in (x_0, x_n),$$

iz čega slijedi *ocjena lokalne pogreške interpolacije*

$$|f(x) - p(x)| \le \frac{\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|}{(n+1)!} M_{n+1}(f), \tag{3}$$

gdje je

$$M_{n+1}(f) = \max_{\xi \in (x_0, x_n)} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Pogrešku interpolacije na cijelom intervalu $[x_0, x_n]$ zovemo još i *uniformna pogreška*. Dobijamo je tako da nađemo maksimum pogreške interpolacije za svaku točku x,

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - p(x)| = \max_{x\in[x_0,x_n]} \frac{\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|}{(n+1)!} \left|f^{(n+1)}(\xi_x)\right|,$$

pri čemu je $\xi_x \in [x_0, x_n]$ i ovisi o x. Naravno, ovo je teško za izračunati, pa se stoga, koristeć i (3), dobija ocjena pogreške interpolacije na cijelom intervalu:

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - p(x)| \le \left|\frac{\omega(x_0, \dots, x_n)}{(n+1)!} M_{n+1}(f)\right| \tag{4}$$

gdje je

$$\omega(x_0, \dots, x_n) = \max_{x\in[x_0,x_n]} (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Primjetimo da se u ocjenama pogreške pojavljuju dva faktora

- $\omega(x_0, \dots, x_n)$, koji ovisi isljučivo o čvorovima mreže i
- $M_{n+1}(f)$, koji ovisi o funkciji koju interpoliramo.

Iz toga slijedi da se manja pogreška ne mora nužno dobiti s povećavanjem broja čvorova.

Zadatak 5: *Nađite interpolacijski polinom p stupnja 2 za funkciju*

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

sa čvorovima interpolacije 0, 1 *i* 3. *Nađite $p(2)$, pravu pogrešku interpolacije u točki 2 i ocjenu pogreške interpolacije u točki 2 i uniformnu ocjenu pogreške interpolacije.*

Rješenje: Interpolacijski polinom p prikazat ćemo u Newtonovom obliku:

x_i \ k	0	1	2
0	0		
		$\ln 2$	
1	$\ln 2$		$-\ln 2/6$
		$\ln 2/2$	
3	$\ln 4$		

pa je interpolacijski polinom dan sa

$$p(x) = \ln 2x - \frac{\ln 2}{6}x(x-1).$$

Prava pogreška u točki 2 je

$$|f(2) - p(2)| = |\ln 3 - \frac{5}{3}\ln 2| = 0.056633.$$

Da bi našli ocjenu pogreške, trebamo naći $f^{(3)}$ i njen maksimum na intervalu $[0, 3]$.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Kako je $f^{(3)}(x)$ padajuća i strogo pozitivna funkcija na intervalu $[0, 3]$, to se njen maksimum postiže u točki 0, pa je $M_3(f) = f^{(3)}(0) = 2$. Lokalna ocjena pogreške u točki 2 je

$$|f(2) - p(2)| \leq \left| \frac{(2-0)(2-1)(2-3)}{3!} 2 \right| = \frac{2}{3}$$

Vidimo da je ova ocjena puno pesimističnija od stvarne pogreške. △

Zadatak 6: *Nađite interpolacijski polinom p stupnja 2 za funkciju*

$$f(x) = \ln(1+x)$$

sa čvorovima interpolacije 0, 1 *i* 3. *Nađite uniformnu ocjenu pogreške interpolacije i pravu uniformnu pogrešku.*

Rješenje: Koristimo rezultate prošlog zadatka. Za ocjenu uniformne pogreške nam treba $\omega(0, 1, 3)$ i $M_3(\ln(1+x)) = 2$. Nađimo sada $\omega(0, 1, 3)$,

$$\omega(0, 1, 3) = \max_{x \in [0,3]} |x(x-1)(x-3)| = \max_{x \in [0,3]} |x^3 - 4x^2 + 3x| = \max_{x \in [0,3]} |\omega(x)|$$

Da bi našli maksimum funkcije $|\omega(x)|$ naći ćemo sve ekstreme funkcije $\omega(x)$ i onda usporediti apsolutne vrijednosti funkcije ω u tim ekstremima. Strogo govoreći trebalo bi još provjeriti rubne točke, ali u njima je ionako ω jednaka 0.

$$\omega'(x) = 3x^2 - 8x + 3,$$

riješimo jednadžbu $\omega'(x) = 0$ i dobijemo rješenja

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7}) = 0.451416\,, \\ x_2 &= \frac{1}{3}(4 + \sqrt{7}) = 2.21525. \end{aligned}$$

Kako je $|\omega(x_1)| = 0.63113|$, a $|\omega(x_2)| = 2.11261$, zaključujemo da je $\omega(0, 1, 3) = 2.11261$, pa je uniformna ocjena pogreške interpolacije

$$\max_{x \in [0,3]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{\omega(0, 1, 3)}{3!} M_3(\ln(1+x)) = \frac{2.11261}{6} 3 = 0.704204.$$

Da nađemo pravu uniformnu pogrešku interpolacije trebamo naći

$$\max_{x\in[0,3]} |f(x) - p(x)| = \max_{x\in[0,3]} |\ln(1+x) - p(x)|$$

Slično kao i prije, treba naći ekstreme funkcije $\ln(1+x) - p(x)$ koji padaju u $[0,3]$. Kako su rubovi intervala ujedno točke interpolacije, vrijednosti greške u njima nije potrebno provjeravati. Jer je

$$(\ln(1+x) - p(x))' = \frac{1}{1+x} - \big(-\frac{1}{3}x + \frac{7}{6}\ln 2\big) = \frac{2\ln 2\, x^2 - 5\ln 2\, x + 6 - 7\ln 2}{6(1+x)}$$

vidimo da su ekstremi nultočke brojnika. Nultočke i vrijednosti pogreške u njima su prikazane dolje:

i	x_i	$\lvert \ln(1+x) - p(x)\rvert$
1	0.39302	0.0314944
2	2.10698	0.0573484

pa vidimo da prava uniformna pogreška iznosi 0.0573484 i postiže se u točki 2.10698. I ovdje je ocjena puno pesimističnija nego prava greška. $\triangle$

Napomena: Najčešće postupak traženja prave uniformne pogreške vodi na komplicirane jednadžbe, teške za rješavanje, ali taj postupak nije neizvediv.

Zadatak 7: *Odredite $t \in (0,1]$ takav da interpolacijski polinom za funkciju*

$$f(x) = x^2 - 6x + 8,$$

s točkama interpolacije $(0, f(0))$ i $(t, f(t))$ ima najmanju moguću maksimalnu pogrešku na intervalu $[0,1]$.

Rješenje: Ovaj zadatak je tipičan predstavnik tzv. minimaks problema. Matematički zapis ovog problema bi bio slijedeći: neka je t^* točka u kojoj se traženi minimum postiže. Tada je

$$t^* = min_{t\in[0,1]} max_{x\in[0,1]} |f(x) - p_t(x)|,$$

gdje je p_t polinom koji interpolira f u točkama 0 i t. Zadatak ćemo rješiti tako da prvo nađemo maksimalnu pogrešku interpolacije polinomom p_t, a onda minimiziramo tu pogrešku. Redom:

$$p_t(x) = 8\frac{t-x}{t} + (t^2 - 6t + 8)\frac{x}{t} = 8 + \frac{t^2 - 6t}{t}x,$$

pa je

$$f(x) - p_t(x) = x^2 - 6x + 8 - \left(8 + \frac{t^2 - 6t}{t}x\right) = x^2 - tx.$$

Ova funkcija ima lokalni ekstrem u $t/2$, a da nađemo maksimalnu pogrešku na intervalu $[0,1]$, trebamo usporediti apsolutne vrijednosti pogreške u lokalnim ekstremima i rubovima intervala. Kako je 0 točka u kojoj interpoliramo, preostaje nam samo usporediti vrijednosti apsolutne pogreške u ekstremu (tj. u $t/2$) i u točki 1. Dakle,

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p_t(x)| &= \max\{|f(t/2) - p_t(t/2)|, |f(1) - p_t(1)|\} \\ &= \max\left\{\frac{t^2}{4}, 1 - t\right\}.\end{aligned}$$

Ako nacrtamo funkcije $t^2/4$ i $1-t$, lako vidimo da vrijedi

$$\max\left\{\frac{t^2}{4}, 1-t\right\} = \begin{cases} 1-t, & \text{za } t \in [0, 2\sqrt{2}-2), \\ \frac{t^2}{4}, & \text{za } t \in [2\sqrt{2}-2, 1]. \end{cases}$$

Točku $2\sqrt{2}-2$ smo dobili kao ono rješenje jednadžbe $t^2/4 = 1-t$ koje pada u interval $[0,1]$. Kada ovo uvrstimo u početni problem dobijemo

$$t^* = \min_{t\in[0,1]} \max\left\{\frac{t^2}{4}, 1-t\right\} = 2\sqrt{2}-2.$$

$\triangle$ **Zadatak 8:** *Zadane su vrijednosti funkcije $f(x) = 1/x$ u čvorovima $1/n$ za $n = 1, \ldots, 4$. Nađite vrijednosti svih interpolacijskih polinoma na bazi te tablice u točki $x = 2/3$ i ocijenite pogrešku. Kada su stvarna greška i pogreška najmanje?*

Rješenje: Imamo točke interpolacije 1/4, 1/3, 1/2 i 1. Kako 2/3 mora biti u intervalu određenom najvećom i najmanjom točkom interpolacije, vidimo da su kandidati polinomi

- p_1, koji interpolira f u 1/2 i 1,
- p_2, koji interpolira f u 1/3 i 1,
- p_3, koji interpolira f u 1/4 i 1,
- p_4, koji interpolira f u 1/3, 1/2 i 1,
- p_5, koji interpolira f u 1/4, 1/2 i 1,
- p_6, koji interpolira f u 1/4, 1/3 i 1,
- p_7, koji interpolira f u 1/4, 1/3, 1/2 i 1.

Prva tri polinoma su prvog stupnja pa će nam za ocjenu pogreške trebati $M_2(f)$ na odgovarajućem intervalu, iduća tri su drugog stupnja pa nam treba $M_3(f)$, a za posljednji polinom nam treba $M_4(f)$. Kako je

$$|f'(x)| = \frac{1}{x^2}, \quad ,|f''(x)| = \frac{2}{x^3}, \quad |f^{(3)}(x)| = \frac{6}{x^4}, \quad |f^{(4)}(x)| = \frac{24}{x^5},$$

vidimo da se maksimum derivacije na bilo kojem od spomenutih intervala postiže u lijevom kraju (funkcije su monotono padajuće).

Nađimo ocjene za odgovarajuće interpolacijske polinome:

- Za p_1 je interval $[1/2, 1]$ pa je $M_2(f) = 16$ iz čega slijedi

$$|f(2/3) - p_1(2/3)| \leq \left|\frac{(1/2-2/3)(1-2/3)}{2}\right| \cdot 4 = \frac{4}{9}.$$

- Za p_2 je interval $[1/3, 1]$ pa je $M_2(f) = 54$ iz čega slijedi

$$|f(2/3) - p_2(2/3)| \leq \left|\frac{(1/3-2/3)(1-2/3)}{2}\right| \cdot 54 = 3.$$

- Za p_3 je interval $[1/4, 1]$ pa je $M_2(f) = 128$ iz čega slijedi

$$|f(2/3) - p_3(2/3)| \leq \left|\frac{(1/4 - 2/3)(1 - 2/3)}{2}\right| \cdot 128 = \frac{80}{9}.$$

- Za p_4 je interval $[1/3, 1]$ pa je $M_3(f) = 486$ iz čega slijedi

$$|f(2/3) - p_4(2/3)| \leq \left|\frac{(1/3 - 2/3)(1/2 - 2/3)(1 - 2/3)}{6}\right| \cdot 486 = \frac{3}{2}.$$

- Za p_5 i p_6 je interval $[1/4, 1]$ pa je $M_3(f) = 1536$ iz čega slijedi

$$|f(2/3) - p_5(2/3)| \leq \left|\frac{(1/4 - 2/3)(1/2 - 2/3)(1 - 2/3)}{6}\right| \cdot 1536 = \frac{160}{27} \text{ i}$$

$$|f(2/3) - p_6(2/3)| \leq \left|\frac{(1/4 - 2/3)(1/3 - 2/3)(1 - 2/3)}{6}\right| \cdot 1536 = \frac{320}{27}.$$

- Za p_7 je interval $[1/4, 1]$ pa je $M_4(f) = 24576$ iz čega slijedi

$$|f(2/3) - p_4(2/3)| \leq \left|\frac{(1/4 - 2/3)(1/3 - 2/3)(1/2 - 2/3)(1 - 2/3)}{24}\right| \cdot 24576 = \frac{2560}{81}.$$

Najmanju ocjenu pogreške ima p_1. Za naći stvarnu pogrešku trebali bi naći sve te interpolacijske polinome što je jedan silno dosadan posao, pa ćemo naći samo interpolacijske polinome p_1, p_4 i p_7, jer njih možemo izvući sve iz jedne tablice podijeljenih razlika.

x_i \ k	0	1	2	3
1/4	4			
		-12		
1/3	3		24	
		-6		-24
1/2	2		6	
		-2		
1	1			

Iz tablice očitavamo (odozdo):

- $p_1(x) = 1 - 2(x - 1)$, pa je stvarna greška $|f(2/3) - p_1(2/3)| = |3/2 - 5/3| = 1/6$
- $p_4(x) = 1 - 2(x - 1) + 6(x - 1)(x - 1/2)$, pa je stvarna greška $|f(2/3) - p_4(2/3)| = |3/2 - 4/3| = 1/6$
- $p_7(x) = 1 - 2(x - 1) + 6(x - 1)(x - 1/2) - 24(x - 1)(x - 1/2)(x - 1/3)$, pa je stvarna greška $|f(2/3) - p_7(2/3)| = |3/2 - 16/9| = 5/18$

Radi potpunosti navedimo da su ostale stvarne pogreške

- $|f(2/3) - p_2(2/3)| = |3/2 - 2| = 1/2$

- $|f(2/3) - p_3(2/3)| = |3/2 - 7/3| = 5/6$
- $|f(2/3) - p_5(2/3)| = |3/2 - 11/9| = 5/18$
- $|f(2/3) - p_6(2/3)| = |3/2 - 2/3| = 5/6$

Najbolju ocjenu ima polinom p_1, a najmanju stvarnu pogrešku imaju p_1 i p_2.

Primjetite da u ovom slučaju povećavanjem broja čvorova interpolacije nismo dobili smanjivanje pogreške. Naravno, ovo ne mora biti pravilo, ali predstavlja jedno upozorenje. $\triangle$

2.5 Ekvidistantni čvorovi

Nas ponekad zanima da li niz interpolacijskih polinoma konvergira prema funkciji f koju interpoliramo, kada povećavamo broj čvorova interpolacije. Ocjene interpolacije su najčešće problematične za izvesti jer problem predstavlja

$$\omega(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \max_{x \in [x_0, \ldots, x_n]} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Za neke specijalne rasporede čvorova x_i broj $\omega(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ se da jednostavno ocijeniti ili izračunati. Jedan od tih specijalnih rasporeda je *ekvidistantna mreža.*

Ekvidistantna mreža predstavlja mrežu (raspored čvorova) kod koje su uzastopni čvorovi jednako udaljeni. Koliko god se ovaj primjer činio specijalnim, treba znati da se u praksi relativno često pojavljuje: npr. mjerenja se izvode u jednakim vremenskim intervalima i na osnovu tih podataka treba predvidjeti ponašanje mjerne veličine u budućnosti i slično. Ekvidistantna mreža s $n + 1$ čvorova $x_0, \ldots, x_n$ se definira sa

$$x_i = x_0 + ih, \qquad h = \frac{x_n - x_0}{n}.$$

Zadatak 9: *Ako su čvorovi interpolacije ekvidistatni, tj.* $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \ldots, n-1$, *onda vrijedi*

$$\omega(x_0, \ldots, x_n) = \max_{x \in [x_0, x_n]} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)| < n! h^{n+1},$$

za svaki $x \in [x_0, \ldots, x_n]$

Rješenje: Ako je $x = x_i$, za neki $i \in \{0, \ldots, n\}$, onda je tvrdnja zadatka trivijalno ispunjena. Pretpostavimo dakle da je $x \neq x_i$. Jer je $x \in [x_0, \ldots, x_n]$, postoji i takav da je $x \in (x_{i-1}, \ldots, x_i)$. Tada je

$$\begin{array}{lcl} |x - x_{i-1}| < h & & |x - x_i| < h \\ |x - x_{i-2}| < 2h & & |x - x_{i+1}| < 2h \\ & \vdots & \\ |x - x_0| < ih & & |x - x_n| < (n - i + 1)h \end{array}$$

pa imamo

$$|(x - x_0) \cdots (x - x_n)| \leq h^{n+1} \cdot i \cdot i - 1 \cdots 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n - i + 1),$$

a kako vrijedi da je $2 \leq i+1,\ 3 \leq i+2,\ \ldots,\ n-i+1 \leq n$ (jer je $i \geq 1$) zaključujemo da vrijedi

$$\omega(x_0,\ldots,x_n) \leq h^{n+1} n!.$$

$\triangle$

Iz zadatka slijedi uniformna ocjena pogreške interpolacijskog polinoma stupnja n na ekvidistantoj mreži s korakom h:

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x)-p(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1} M_{n+1} f.$$

Sada možemo riješiti zadatke u kojima tražimo odgovore na pitanja tipa: nađite n takav da polinom p stupnja n interpolira funkciju f na ekvidistantnoj mreži tako da pogreška ne prelazi ε.

Zadatak 10: *Zadana je funkcija*

$$f(x) = \frac{x+1}{(3-x)^2}$$

na intervalu $[1,2]$. *Funkciju* f *interpoliramo polinomima* p_n *s* $n+1$ *čvorom na ekvidistantnoj mreži. Dokažite da niz polinoma* p_n *uniformno konvergira funkciji* f, *kada* n *teži u* ∞. *Nađite najmanji takav* n *da pogreška ne prelazi* 10^{-2} *na cijelom intervalu.*

Rješenje: Rastavimo funkciju f na parcijalne razlomke i dobijemo

$$f(x) = \frac{4}{(3-x)^2} - \frac{1}{3-x}.$$

Kako je

$$\left(\frac{1}{3-x}\right)' = \frac{1}{(3-x)^2},$$

imamo da je

$$f^{(n+1)}(x) = 4\left(\frac{1}{3-x}\right)^{(n+2)} - \left(\frac{1}{3-x}\right)^{(n+1)}$$

Indukcijom se pokaže da je

$$\left(\frac{1}{3-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(3-x)^{n+1}}.$$

pa je

$$f^{(n+1)}(x) = 4\frac{(n+2)!}{(3-x)^{n+3}} - \frac{(n+1)!}{(3-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(3-x)^{n+3}}\big(5+4n+x\big)$$

pa je

$$|f^{(n+1)}(x)| = \frac{(n+1)!}{(3-x)^{n+3}}\big(5+4n+x\big) \leq (n+1)!(7+4n),$$

jer $|f^{(n+1)}(x)|$ postiže maksimum u točki $x = 2$. Koristeći formulu za ocjenu pogreške u slučaju uniformne mreže dobijamo da je

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1}(n+1)!(7+4n) = \frac{(n-1)!\cdot(4n+7)}{n^n}$$

Kako je

$$\frac{(n-1)!\cdot(4n+7)}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{4n+7}{n} \leq \frac{5}{n},$$

jer je $2/n < 1$,...,$(n-1)/n < 1$ i $(4n+7)/n < 5$ (za dovoljno veliki n), dobijemo

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{5}{n} \to 0$$

kada n teži u ∞. Drugi dio zadatka ćemo dobiti tako da riješimo nejednadžbu

$$\frac{(n-1)!\cdot(4n+7)}{n^n} \leq 10^{-2}$$

i to najprimitivnijom metodom, metodom uvrštavanja. Konačno, za $n = 9$ dobijemo da je ocjena pogreška manja od 10^{-2}.

n	$\frac{(n-1)!\cdot(4n+7)}{n^n}$
5	0.20736
6	0.0797325
7	0.0305995
8	0.0117159
9	0.00447514

△

2.6 Čebiševljevi polinomi

Čebiševljevi polinomi određeni su formulom:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Za njih vrijedi rekurzivna formula

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, \ldots,$$

uz početne uvjete $T_0(x) = 1$ i $T_1(x) = x$.

Nekoliko prvih Čebiševljevih polinoma:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= x,\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x, \\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1,
\end{aligned}
$$

Čebiševljev polinom T_n je jedno rješenje Čebiševljeve diferencijalne jednadžbe

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

Drugo partikularno rješenje Čebiševljeve diferencijalne jednadžbe je funkcija

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x),$$

koju zovemo *Čebiševljeva funkcija druge vrste.* I za funkcije U_n vrijedi ista rekurzivna formula kao i za Čebiševljeve polinome, samo su početni uvjeti sada $U_0(x) = 0$ i $U_1(x) = \sqrt{1-x^2}$

Nultočke Čebiševljevog polinoma $T_n,\ n \geq 1$ dane su sa

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Označimo sa

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n = \{p \in \mathcal{P}_n : p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0\}$$

skup svih polinoma stupnja n sa svojstvom da im je koeficijent uz najvišu potenciju 1. Nadalje, definiramo *max-normu* funkcije f na nekom intervalu $[a, b]$, u oznaci

$$\|f\|_{[a,b]}$$

sa

$$\|f\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Tada vrijedi

Teorem 1 *Za svaki polinom* $p \in \widetilde{\mathcal{P}}_n$ *vrijedi nejednakost*

$$\|p\|_{[-1,1]} \geq 2^{-n+1}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$p = \frac{1}{2^{-n+1}} T_n.$$

Drugim riječima, vrijedi

$$\|p\|_{[-1,1]} \geq \|\frac{1}{2^{-n+1}} T_n\|_{[-1,1]} \qquad \textit{za sve } p \in \widetilde{\mathcal{P}}_n.$$

Sličan teorem vrijedi i za bilo koji drugi interval $[a, b]$. U tom slučaju promatramo bijekciju $l(x) : [a, b] \to [-1, 1]$, definiranu sa

$$l(x) = \frac{2}{b-a}(x-a) - 1$$

i njen inverz $l^{-1}(x) : [-1,1] \to [a,b]$, definiran sa

$$l^{-1}(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}.$$

Na intervalu $[a,b]$ definiramo polinome $\widetilde{T}_n(x) = T_n \circ l(x)$. Lako se vidi da je

$$\|\widetilde{T}_n\|_{[a,b]} = \|T_n\|_{[-1,1]}.$$

I za polinome $\widetilde{T}_n$ vrijede ista svojstva kao i za T_n.

Teorem 1 važan nam je zbog ocjene pogreške interpolacijskog polinoma. Naime, kako znamo, ocjena pogreške interpolacijskog polinoma p_n koji interpolira funkciju f na intervalu $[a,b]$, u čvorovima $x_0, \ldots, x_n$ je dana sa

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \omega_n(x) \frac{M_{n+1}f}{(n+1)!},$$

iz čega slijedi

$$\|f - p_n\|_{[a,b]} \leq \|\omega_n\|_{[a,b]} \frac{M_{n+1}f}{(n+1)!},$$

gdje su

$$\begin{aligned} \omega_n(x) &= (x-x_0)\cdots(x-x_n) \text{ i} \\ M_{n+1}f &= \|f^{(n+1)}\|_{[x_0,x_n]}. \end{aligned}$$

Kako polinom ω_n ima koeficijent 1 uz najvišu potenciju, zaključujemo da ako čvorove $x_0, \ldots, x_n$ odaberemo da budu nultočke polinoma $\widetilde{T}_{n+1}$, da je u tom slučaju $\|\omega_n\|_{[a,b]}$ minimalna. Nultočke polinoma $\widetilde{T}_n$, $\tilde{x}_k$, računamo iz nultočaka polinoma T_n, formulom

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2}\left[a + b - (a-b)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right], \; k = 0, \ldots, n-1.$$

U slučaju da smo odabrali nultočke polinoma $\widetilde{T}_{n+1}$ za čvorove interpolacije dobijemo

$$\|\omega_n\|_{[a,b]} = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

Zadatak 11: *Za funkciju*

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

na intervalu $[-1,1]$ nađite interpolacijski polinom stupnja 2 na ekvidistatnoj i Čebiševljevoj mreži te uniformnu ocjenu greške.

Rješenje: Ekvidistantna mreža sastoji se od čvorova -1,0 i 1. Tablica podijeljenih razlika dana je sa

x_i \ k	0	1	2
-1	$1/26$		
		$25/26$	
0	1		$-25/26$
		$-25/26$	
1	$1/26$		

pa je interpolacijski polinom dan sa

$$p_2(x) = \frac{1}{26} + \frac{25}{26}(x+1) - \frac{25}{26}x(x+1) = 1 - \frac{25}{26}x^2.$$

Na Čebiševljevoj mreži čvorovi su dani kao nultočke polinoma $T_3(x) = \cos(3 \arccos x)$, a to su

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{6}, \quad i = 0, 1, 2.$$

pa je

$$x_0 = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = \cos(3\pi/6) = 0, \quad x_2 = \cos(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tablica podijeljenih razlika dana je sa

x_i \ k	0	1	2
$\sqrt{3}2$	4/79		
		$-\frac{150}{79\sqrt{3}}$	
0	1		$-\frac{100}{79}$
		$\frac{150}{79\sqrt{3}}$	
$-\sqrt{3}2$	4/79		

pa je interpolacijski polinom dan sa

$$r_2(x) = \frac{4}{79} - \frac{150}{79\sqrt{3}}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{100}{79}x(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - \frac{100}{79}x^2.$$

Želimo naći ocjenu pogreške, za to nam je potreban maksimum $|f^{(3)}(x)|$ na $[-1, 1]$. Kako je

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{50x}{(1+25x^2)^2}, \\
f''(x) &= -\frac{50(1-75x^2}{(1+25x^2)^3}, \\
f'''(x) &= -15000\frac{25x^3 - x}{(1+25x^2)^4}, \\
f^(4)(x) &= \frac{15000}{(1+25x^2)^5}(3125x^4 - 250x^2 + 1),
\end{aligned}$$

treba naći rješenje jednadžbe

$$3125x^4 - 250x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3125u^2 - 250u + 1 = 0.$$

i dobijemo

$$u_1 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{125} = 0.075777, \quad u_2 = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{125} = 0.004922$$

pa su nultočke četvrte derivacije u točkama

$$x_{1,2} = \pm 0.275 \;\text{ i }\; x_{3,4} = \pm 0.06498.$$

Da bi našli maksimum $|f^{(3)}(x)|$ na $[-1,1]$ pogledat ćemo vrijednosti od $|f^{(3)}(x)|$ u točkama ekstrema i u rubovima, a kako je $f^{(3)}(x)$ neparna funkcija, dovoljno je pogledati samo za pozitivne točke, pa dobijamo:

$$|f^{(3)}(x_1)| = 52.62, \quad |f^{(3)}(x_3)| = 583.57, \quad |f^{(3)}(1)| = 0.787.$$

Dakle,

$$\max_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)| = 583.57.$$

Primjetimo da bi u ovom slučaju ocjena maksimuma bila jako neefikasna.

Konačno, za uniformnu ocjenu greške trebamo naći

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x+1)x(x-1)|.$$

Promatramo polinom $s(x) = x^3 - x$. On svoje ekstreme postiže u točkama $\pm 1/\sqrt{3}$ i po apsolutnoj vrijednosti oni iznose $2\sqrt{3}/9$, je uniformna ocjena greške u ekvidistantnom slučaju dana sa

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{2\sqrt{3}/9}{6} \cdot 583.57 = 37.436.$$

Za interpolacijski polinom na Čebisevljevoj mreži, vrijedi da je

$$\max_{x\in[-1,1]} (x + \sqrt{3}2)x(x - \sqrt{3}2) = \frac{1}{4},$$

pa je uniformna ocjena pogreške dana sa

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - r_2(x)| \leq \frac{1/4}{6} \cdot 583.57 = 24.315.$$

Napomenimo samo da prava maksimalna pogreška u slučaju ekvidistantne mreže iznosi 0.646229, a u slučaju Čebiševljeve mreže 0.6005977. △

2.7 Po dijelovima linearna interpolacija

Interpolacija polinomom, nažalost, ne može ispuniti jedan od osnovnih ciljeva aproksimacije: $\epsilon > 0$ naći interpolacijski polinom stupnja n takav da je maksimalna pogreška interpolacije manja od ϵ. Stoga smo prisiljeni pribjegavati drugim metodama. Jedna od najjednostavnijih takvih metoda, ali ne zato manje efikasna, je *po dijelovima linearna interpolacija* ili *interpolacija linearnim splineom.*

Definirajmo prvo što je to linearni spline. Neka je na intervalu $[a,b]$ zadana mreža

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Linearni spline l na mreži $(x_0,\ldots,x_n)$ je ona funkcija čija je restrikcija na intervalu $[x_{i-1},x_i]$ linearni polinom. Restrikciju funkcije l na $[x_{i-1},x_i]$ zvat ćemo l_i.

Ideja po dijelovima linearne interpolacije da odredimo čvorove interpolacije x_i, a nakon toga na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ nađemo linearni interpolacijski polinom, koji interpolira tražene podatke u čvorovima x_{i-1} i x_i. Stoga je

$$l_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i) + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}).$$

Pogreška ove interpolacije u nekoj točki x je očito jednaka pogrešci interpolacije linearnim polinomom, pa su nam rezultati već otprije poznati. Vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 2 *Neka je zadana funkcija f i interval $[a, b]$. Neka je na intervalu $[a, b]$ zadana mreža $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ i neka je l linearni spline (po dijelovima linearna interpolacija) za funkciju f u čvorovima x_i. Tada vrijedi*

- *ako je $f \in C^2([a, b])$ tada je*

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - l(x)| \leq \frac{1}{8}\Delta^2 M_2 f,$$

- *ako je $f \in C^1([a, b])$ tada je*

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - l(x)| \leq \frac{1}{2}\Delta M_1 f,$$

- *ako je $f \in ([a, b])$ tada je*

$$|f(x)-l(x)| \leq \max_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} \{|f(\xi)-f(x_i)|, |f(\xi)-f(x_{i-1})|\}, \quad x_{i-1} < x < x_i,$$

pri čemu je

- $\Delta = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} x_i - x_{i-1}$,
- $M_1 f$ *- maksimum apsolutne vrijednosti f' na $[a, b]$,*
- $M_2 f$ *- maksimum apsolutne vrijednosti f'' na $[a, b]$.*

Zadatak 12: *Aproksimiramo funkciju $f(x) = \ln x$ na intervalu $[1, 100]$ po dijelovima linearnom interpolacijom. Fiksiramo traženu točnost $\epsilon = 10^{-4}$ koju zahtijevamo na cijelom intervalu. Nađite broj čvorova potreban da se postigne tražena točnost uz*

1. *ekvidistantnu mrežu s korakom h na cijelom intervalu $[1, 100]$,*
2. *podjelu intervala na tri dijela $[1, 2]$, $[2, 7]$, $[7, 100]$, i svaki od ta tri intervala podijelimo na ekvidistantnu mrežu s koracima h_1,h_2, h_3, respektivno,*
3. *izračunajte vrijednost aproksimacije i pogreške u točki $x = e^2$ za obje mreže.*

Rješenje: Kako je $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, zaključujemo da funkcija $|f''(x)| = 1/x^2$ na intervalu $[a, b]$, $a > 0$ postiže svoj maksimum u lijevom kraju. Koristeći ocjenu pogreške iz Teorema 2, dobijamo da je na intervalu $[1, 100]$, uz ekvidistantnu mrežu s korakom h, pogreška interpolacije manja ili jednaka $h^2/8$ (jer je $M_2 f = 1$) pa je traženi h rješenje nejednadžbe

$$\frac{h^2}{8} < 10^{-4} \quad \Rightarrow h < 10^{-2}\sqrt{8} = 0.02828427.$$

Kako je $h = (b - a)/n$ imamo da je

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{99}{0.02828427} = 3500,17 \Rightarrow n = 3501, \quad h = 0.028277634.$$

Dakle, u prvom slučaju je broj čvorova 3502.

U drugom slučaju mora na svakom intervalu vrijediti da je pogreška manja od 10^{-4}. Na prvom intervalu ([1,2]) je $M_2 f = 1$ pa mora biti

$$h_1^2 < 8 \cdot 10^{-4} \Rightarrow h < 0.02828427,$$

no kako je $h_1 = (2 - 1)/n_1$, imamo da je

$$n_1 \geq 1/h_1 = 35.35 \Rightarrow n_1 = 36, \quad h_1 = 0.02777.$$

Na drugom intervalu ([2,7]) je $M_2 f = 1/4$ pa mora biti

$$h_2^2 < 32 \cdot 10^{-4} \Rightarrow h_2 < 0.056568542,$$

no kako je $h_2 = (7 - 2)/n_2$, imamo da je

$$n_2 \geq 5/h_2 = 88.38 \Rightarrow n_2 = 89, \quad h_2 = 0.056179.$$

Konačno, na trećem intervalu ($[7, 100]$) je $M_3 f = 1/49$ pa je

$$h_3^2 < 392 \cdot 10^{-4} \Rightarrow h_3 < 0.197989,$$

a kako je $h_3 = (100 - 7)/n_3$, imamo da je

$$n_3 \geq 93/h_3 = 469.72 \Rightarrow n_3 = 470, \quad h_2 = 0.19787.$$

U ovom slučaju ukupan broj čvorova je $n_1 + n_2 + n_3 + 1 = 596$. $\triangle$

2.8 Višestruki čvorovi

Posebno zanimljiv slučaj interpolacije nastaje kada trebamo interpolirati ne samo vrijednost funkcije u točki, nego i vrijednost derivacije (ili više derivacija) u toj točki. Takvi problemi nastaju npr. u CAGD-u (Computer Aided Graphic Design) kada želimo napraviti krivulju kojoj želimo unaprijed odrediti tangentu u nekim točkama.

Pri tome razlikujemo dva slučaja interpolacije:

1. interpolacija u slučaju kada su u nekoj točki zadane sve derivacije redom, počevši od nulte do posljednje , te

2. interpolacija u slučaju kada su u nekoj točki zadane samo neke derivacije.

U prvom slučaju vrijedi teorem koji nam kaže da takva interpolacija postoji, dok u drugom slučaju ta interpolacija ne treba uvijek postojati. Sada se baziramo na prvi slučaj.

Teorem 3*Neka su zadani čvorovi $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$, kratnosti $n_i \geq 1$, $i = 0, \ldots, m$, te brojevi $y_i^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n_i - 1$, $i = 0, \ldots, m$. Tada postoji točno jedan polinom p stupnja $n = -1 + \sum_{k=0}^{m} n_k$, takav da je*

$$p^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, \ldots, n_i - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Nadalje, ako je $x \in [x_0, x_m]$ i $f \in C^{(n)}(x_0, x_m)$, tada postoji $\xi \in (x_0, x_m)$ takav da vrijedi

$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)^{n_0} \cdot (x - x_1)^{(n_1)} \cdots (x - x_m)^{n_m}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Prethodni teorem nam je dao okvir koji kaže da interpolacijski polinom postoji. Sada trebamo naći prikladnu metodu. Jedna od mogué nosti je da rješavamo odgovarajući sustav

$$p^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, \ldots, n_i - 1, \quad i = 0, \ldots, m,$$

gdje su nepoznanice koeficijenti polinoma p, ali to ćemo iskoristiti kod drugog slučaja interpolacije (naravno, ništa nas ne spriječava da to i sada napravimo). Puno bolje bi bilo modificirati Newtonov algoritam za dobivanje interpolacijskog polinoma. Pogledajmo sada slijedeći slučaj: želimo na mreži $x_0 < x_1$ aproksimirati funkciju f i to tako da se naš interpolacijski polinom poklapa sa $f(x_0)$, $f'(x_0)$ i $f(x_1)$. Dakle, imamo slijedeću situaciju: u x_0 aproksimiramo $f(x_0)$, u x_0 aproksimiramo $f'(x_0)$ i u x_1 aproksimiramo $f(x_1)$. Vidimo da se x_0 ovdje pojavljuje više puta (od tuda naziv višestruki čvorovi). Postupak Newtonove interpolacije bi nas sada vodio do tablice

x_i \ k	0	1	2
x_0	$f(x_0)$		
		$f[x_0, x_0]$	
x_0	$f(x_0)$		$f[x_0, x_0, x_1]$
		$f[x_0, x_1]$	
x_1	$f(x_1)$		

U gornjoj tablici sve elemente znamo izračunati osim jednog $f[x_0, x_0]$. Naime, prema definiciji je

$$f[x_0, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x_0 - x_0}$$

a to je neodređeni izraz (0/0). Zato moramo biti lukaviji: vrijedi slijedeće:

$$f[x_0, x_0] = \lim_{h \to 0} f[x_0, x_0 + h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = f'(x_0),$$

što je upravo ono što nam treba. Na sličan način se može dokazati mnogo općenitiji rezultat:

$$f[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Zadatak 13: *Konstruirajte interpolacijski polinom koji zadovoljava slijedeće uvjete:*

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
1	*2*	*3*	-
2	*6*	*7*	*8*

Rješenje: Dobijemo slijedeću tablicu podijeljenih razlika

x_i \ k	0	1	2	3	4
1	2				
		3			
1	2		1		
		4		2	
2	6		3		-1
		7		1	
2	6		4		
		7			
2	6				

pa je interpolacijski polinom dan sa

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) - (x-1)^2(x-2)^2.$$

△

Interpolacija funkcije i njenih derivacija se ponekad još naziva i Hermiteova (ili Lagrenge-Sylvesterova) interpolacija.

Za drugi slučaj interpolacije već smo rekli da interpolacijska funkcija može ali i ne mora postojati. U ovom slučaju se ne smiju koristiti formule za Newtonovu interpolaciju nego koeficijente interpolacijskog polinoma dobijemo rješavanjem sustava

$$p^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, \ldots, n_i - 1, \quad i = 0, \ldots, m.$$

Zadatak 14: *Konstruirajte, ako postoji, interpolacijski polinom za zadane vrijednosti funkcije f:*

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4, & f'(-1) &= 17, \\ f(0) &= 2, & f''(0) &= 4, \\ f(1) &= 8, & f'(1) &= 17\,. \end{aligned}$$

Rješenje: Vidimo da u točki 0 imamo zadanu vrijednost funkcije i njene druge derivacije, ali nemamo zadanu vrijednost prve derivacije. Zbog toga ne možemo iskoristi Newtonovu metodu, već trebamo rješavati sustav linearnih jednadžbi. Kako nam je zadano 6 uvjeta, interpolacijski polinom p je stupnja 5 i ima opći oblik

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5.$$

Kako je

$$\begin{aligned} p'(x) &= b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4, \\ p''(x) &= 2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 \end{aligned}$$

iz uvjeta interpolacije slijedi sustav

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a & - & b & + & c & - & d & + & e & - & f & = & 4 \\ & & b & - & 2c & + & 3d & - & 4e & + & 5f & = & 17 \\ a & & & & & & & & & & & = & 2 \\ & & & & 2c & & & & & & & = & 4 \\ a & + & b & + & c & + & d & + & e & + & f & = & 8 \\ & & b & + & 2c & + & 3d & + & 4e & + & 5f & = & 17 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} f(-1) = 4 \\ f'(-1) = 17 \\ f(0) = 2 \\ f''(0) = 4 \\ f(1) = 8 \\ f'(1) = 17 \end{array}$$

Iz treće i četvrte jednadžbe dobijamo da je $a = 2$ i $c = 2$. Nadalje, ako zbrojimo prvu i petu jednadžbu te od šeste jednadžbe oduzmemo drugu dobit ćemo sustav

$$\begin{array}{ccccccc} 2a & + & 2c & + & 2e & = & 12 \\ & & 4c & + & 8e & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} e & = & 2 \\ e & = & 0 \end{array}$$

pa dobijemo da ovaj sustav nema rješnja. Dakle, traženi interpolacijski polinom ne postoji. $\triangle$

Da to ne mora biti uvijek tako, pokazuje idući zadatak:

Zadatak 15: *Konstruirajte interpolacijski polinom za zadane vrijednosti funkcije f:*

$$\begin{array}{rcl} f(-1) &=& 20, \\ f(0) &=& 0, \\ f(1) &=& 4, \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f''(-1) &=& 108, \\ f'(0) &=& -6, \\ f''(1) &=& 0\,. \end{array}$$

Nadalje, aproksimirajte vrijednost funkcije f u točki 0.5.

Rješenje: Slično kao u prethodnom zadatku, p je polinom stupnja 5 i vrijedi

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5. \\ p'(x) &= b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4, \\ p''(x) &= 2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 \end{aligned}$$

Iz uvjeta interpolacije slijedi

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a & - & b & + & c & - & d & + & e & - & f & = & 20 \\ & & & & 2c & - & 6d & + & 12e & - & 20f & = & 108 \\ a & & & & & & & & & & & = & 0 \\ & & b & & & & & & & & & = & -6 \\ a & + & b & + & c & + & d & + & e & + & f & = & 4 \\ & & & & 2c & + & 6d & + & 12e & + & 20f & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} f(-1) = 20 \\ f''(-1) = 108 \\ f(0) = 0 \\ f''(0) = 4 \\ f(1) = 4 \\ f''(1) = 0 \end{array}$$

Iz treće i četvrte jednadžbe slijedi da je $a = 0$ i $b = -6$. Nadalje, ako zbrojimo prvu i petu te drugu i šestu jednadžbu dobit ćemo sustav

$$\begin{array}{ccccccc} 2a & + & 2c & + & 2e & = & 24 \\ & & 4c & + & 24e & = & 108 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} c & + & e & = & 12 \\ c & + & 6e & = & 27 \end{array}$$

pa dobijemo da je $e = 3$ i $c = 9$. S druge strane, ako od pete jednadžbe oduzmemo prvu i od šeste oduzmemo drugu, dobit ćemo sustav

$$\begin{array}{ccccccc} 2b & + & 2d & + & 2f & = & -16 \\ & & 12d & + & 40f & = & -108 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} d & + & f & = & -2 \\ 3d & + & 10f & = & -27 \end{array}$$

čija su rješenja $f = -3$ i $d = 1$, pa je traženi interpolacijski polinom dan sa

$$p(x) = -6x + 9x^2 + x^3 + 3x^4 - 3x^5.$$

$\triangle$

3 Numerička integracija

3.1 Osnovni pojmovi

Osnovni problem numeričke integracije se sastoji u tome da izračunamo određeni integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Ideja je da integral funkcije f zamijenimo integralom neke aproksimacije funkcije f koji se lako može izračunati. Ta aproksimacije je najčešće polinomna, ali može biti i nekim drugim funkcijama.

Mi ćemo se bazirati na slučaj polinomne aproksimacije i pri tome razlikujemo tri načina integracije:

- Newton-Cotesove formule
- Gaussove formule
- razne izvedene formule.

3.2 Newton-Cotesove formule

Ideja kod Newton-Cotesovih formula je da umjesto integracije funkcije f integriramo polinomnu interpolaciju funkcije f u ekvidistantnim točkama. Neka trebamo izračunati

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Neka je p_1 linearni polinom koji interpolira funkciju f u točkama a i b. Ako integral funkcije f zamijenimo integralom interpolacijskog polinoma p_1 dobijemo *trapeznu formulu*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \frac{b-a}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big) =: I_T$$

Ukoliko funkciju f na intervalu $[a,b]$ interpoliramo polinomom stupnja 2 na ekvidistantnoj mreži s čvorovima a, $(a+b)/2$ i b, dobit ćemo *Simpsonovu formulu.* Preciznije, neka je p_2 taj interpolacijski polinom tada je

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\Big(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\Big) =: I_S.$$

Sada nas zanima kolika je pogreška ovih metoda. Imamo slijedeće rezultate:

- za trapeznu formulu vrijedi

$$\left|\int_a^b f(x)dx \;-\; I_T\right| := R_T \le \frac{(b-a)^3}{12}M_2 f,$$

- za Simpsonovu formulu vrijedi

$$\left|\int_a^b f(x)dx \,-\, I_S\right| := R_S \leq \frac{(b-a)^5}{180} M_4 f.$$

Naravno, mi ovaj postupak možemo ponavljati i dalje (tražiti interpolaciju polinomom većeg stupnja), ali se pokaže da to nije isplativo. Puno više se isplati iskoristiti svojstvo integrala da je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

i početni interval $[a, b]$ podijeliti na više manjih, jednako širokih intervala na koji ćemo primjeniti ili trapeznu ili Simpsonovu formulu. Ta ideja nas vodi do *produljenih formula.*

U slučaju da na svaki interval primjenjujemo trapeznu formulu imamo *produljenu trapeznu formulu.* Pretpostavimo da smo interval $[a, b]$ podijelili na n jednako širokih podintervala $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, točkama $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$. Tada produljena trapezna formula glasi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right) =: I_{PT}.$$

Ocjena pogreške produljene trapezne formule dana je sa

$$\left|\int_a^b f(x)dx \,-\, I_{PT}\right| := R_{PT} \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 f.$$

S druge strane, ako na svaki interval primjenimo Simpsonovu formulu tada imamo *produljenu Simpsonovu formulu.* Opet pretpostavimo da smo podijelili interval $[a, b]$, ali ovog puta na m dijelova. Da bi primjenili Simpsonovu formulu trebamo unutar svakog intervala staviti i jednu točku u polovište pa tako dolazimo da ukupno $n = 2m$ intervala. Dakle, mi primjenjujemo Simpsonovu formulu na intervalima $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i = 1, \ldots m$. Točke x_i su definirane sa $x_i = a + ih$, a $h = (b-a)/n$ (pazi n, a ne m!). Produljena Simpsonova formula glasi tada

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right) =: I_{PS}.$$

Ocjena pogreške produljene Simpsonove formule dana je sa

$$\left|\int_a^b f(x)dx \,-\, I_{PS}\right| := R_{PS} \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 f.$$

Zašto su nam ove ocjene pogreške važne? Pretpostavimo da trebamo izračunati integral neke funkcije f na intervalu $[a, b]$ s unaprijed zadanom točnosti ε. Pitanje je na koliko intervala trebamo podijeliti $[a, b]$. Nekakvo ocjenjivanje "odoka" može voditi ili netočnom računu (ako smo napravili premalu podjelu) ili presporom računu (ako smo napravili preveliku podjelu). Stoga mi iz ocjena pogreške određujemo broj intervala podjele. Vrijedi slijedeće: ako je R ocjena pogreške neke metode integracije tada je uvjet da prava pogreška interpolacije bude manja od ε zadovoljen ako vrijedi da je ocjena pogreške E manja od ε. Konkretno, za produljenu trapeznu formulu vrijedi

$$R_{PT} \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 f,$$

pa ako je

$$\frac{(b-a)h^2}{12} M_2 f \leq \varepsilon,$$

sigurno je i R_{PT} manji od ε. Kako je $h = (b-a)/n$,

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 f \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2 f \leq n^2 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2 f}. \tag{5}$$

Za produljenu Simpsonovu formulu vrijedi

$$R_{PS} \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 f,$$

pa ako je

$$\frac{(b-a)h^4}{180} M_4 f \leq \varepsilon,$$

sigurno je i R_{PS} manja od ε. Kako je $h = (b-a)/n$,

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 f \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} M_4 f \leq n^4 \Rightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} M_4 f}, \tag{6}$$

s time da trebamo obratiti pažnju na to da n mora biti paran, pa možemo uzeti prvi parni cijeli broj koji zadovoljava nejednakost.

Primjer 1: *Izračunajte vrijednost integrala*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

produljenom trapeznom formulom uz $h = 0.1$*, ocijenite pogrešku i nađite pravu grešku. Također, nađite najmanji* n *takav da pogreška integracije ne prelazi* 10^{-4}.

Rješenje: Identificiramo parametere formule: $a = 0$, $b = 1$, $h = 0.1$, $n = 10$, $f(x) = 1/(1+x)$. Za računanje vrijednosti integrala napravimo tablicu

i	x_i	$f(x_i)$
0	0.0	1.00000
1	0.1	0.90909
2	0.2	0.83333
3	0.3	0.76923
4	0.4	0.71429
5	0.5	0.66667
6	0.6	0.62500
7	0.7	0.58824
8	0.8	0.55556
9	0.9	0.52632
10	1.0	0.50000

i dobijemo

$$I_{PT} = \frac{0.1}{2}\Big[f(x_0) + 2\Big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_9)\Big) + f(x_10)\Big] = 0.69377$$

Za ocjenu pogreške trebamo $M_2 f$. Kako je

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

padajuća i pozitivna funkcija, dobijemo da je $M_2 f = |f''(0)| = 2$ pa za grešku integracije vrijedi

$$R_{PT} \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 f = \frac{1 \cdot 0.1^2}{12} \cdot 2 = 0.0016666.$$

Kako je

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 = 0.69315,$$

vidimo da je prava pogreška

$$R_{PT} = |0.69315 - 0.69377| = 0.00062.$$

Broj intervala potreban da bi pogreška bila manja od 10^{-4} dobijemo uvrštavanjem potrebnih podataka u (5):

$$n \geq \sqrt{\frac{1^3}{12 \cdot 10^{-4}} \cdot 2} = 40.82,$$

pa je najmanji broj intervala potreban za traženu točnost 41. △

Primjer 2: *Izračunajte vrijednost integrala*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

produljenom Simpsonovom formulom uz $h = 0.1$*, ocijenite pogrešku i nađite pravu grešku. Također, nađite najmanji* n *takav da pogreška integracije ne prelazi* 10^{-4}.

Rješenje: Koristimo podatke iz prethodnog primjera: $a = 0$, $b = 1$, $h = 0.1$, $n = 10$, $f(x) = 1/(1+x)$. Tablicu sa vrijednostima funkcije smo već napravili, pa je

$$\begin{aligned} I_{PS} = \frac{0.1}{3} \quad & \Big[f(x_0) + 4\Big(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)\Big) \\ & +2\Big(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)\Big) + f(x_{10})\Big] = 0.69315 \end{aligned}$$

što predstavlja $\ln 2$ na pet decimala. Inače prava greška iznosi $R_{PS} = 3.0505 \cdot 10^{-6}$. Nadalje,

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

je pozitivna padajuća funkcija pa je $M_4 f = f^{(4)}(0) = 24$. Ocjena pogreške je dana sa

$$R_{PS} \le \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 f = \frac{1 \cdot 0.1^4}{180} \cdot 24 = 1.33333 \cdot 10^{-5}.$$

Broj čvorova n potreban da se postigne tražena točnost ε dobijemo iz formule (**??**):

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{1^5}{180 \cdot 10^{-4}} \cdot 24} = 6.042.$$

Kako n treba biti paran, najmanji broj čvorova za koji nam se garantira točnost 10^{-4} je 8. $\triangle$

Zadatak 1: *Nađite broj čvorova n potreban da bi izračunali integral*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$$

s točnošću $\varepsilon = 0.0005$, ako koristimo

a) produljenu trapeznu formulu,

b) produljenu Simpsonovu formulu.

Rješenje: Koristiti ćemo formule za broj čvorova koje su nam od prije poznate. Vidimo da su u njima jedine nepoznanice $M_2 f$ i $M_4 f$, maksimumi druge, odnosno četvrte derivacije funkcije f. Odredimo sada $M_2 f$. Kako je (za izvod se može koristiti Leibnitzova formula!)

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{\sin x}{x} - 2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\sin x}{x^3} \\
&= \sin x\Big(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\Big) - 2\frac{\cos x}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^3}\Big[\sin x\big(x^2 - 1\big) - 2x\cos x\Big],
\end{aligned}$$

tada vrijedi (nejednakost trokuta ...)

$$\begin{aligned}
|f''(x)| &= \left|\frac{1}{x^3}\Big[\sin x\big(x^2 - 1\big) - 2x\cos x\Big]\right| \\
&\le \frac{1}{x^3}\Big(|\sin x| \cdot |x^2 - 1| + |2x| \cdot |\cos x|\Big) \\
&= \frac{1}{x^3}\Big(\sin x \cdot |x^2 - 1| + 2x \cdot \cos x\Big) \\
&\le \frac{1}{(\pi/4)^3}\Big(1 \cdot |(\pi/2)^2 - 1| + 2 \cdot (\pi/2)\cos(\pi/4) \\
&= 7.6141
\end{aligned}$$

Sada je traženi n

$$n \ge \sqrt{\frac{(\pi/4)^3}{12 \cdot 0.0005} \cdot 7.6141} = 24.795.$$

Znači, najmanji n je 25.

Za nalaženje broja čvorova kod Simpsonove formule treba nam $M_4 f$. Kako je (izvedi!)

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{\sin x}{x} + 4\frac{\cos x}{x^2} - 12\frac{\sin x}{x^3} - 24\frac{\cos x}{x^4} + 24\frac{\sin x}{x^5} \\ &= \sin x\Big(\frac{1}{x} - \frac{12}{x^3} + \frac{24}{x^5}\Big) + \cos x\Big(\frac{4}{x^2} - \frac{24}{x^4}\Big) \\ &= \frac{1}{x^5}\Big[\sin x\big(x^4 - 12x^2 + 24\big) + \cos x\big(4x^3 - 24x\big)\Big] \end{aligned}$$

$\triangle$

3.3 Gaussova integracija

Promatramo slijedeći problem: naći integracijsku formulu takvu da je

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^n w_{j,n} f(x_{j,n}) + R_n(f).$$

U gornjoj formuli brojeve $w_{j,n}$ zovemo težine, $x_{j,n}$ su čvorovi integracije, a $R_n(f)$ je greška integracije. Funkcija $w(x)$ se naziva *težinska funkcija*. Naravno da mi ovo možemo računati primjenom Newton-Cotesovih integracijskih formula, ali pitanje je da li se može bolje i ako može kako.

Utvrdimo prvo neke pojmove: težinska funkcija $w(x)$ zadovoljava:

1. $w(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, i
2. w je integrabilna na intervalu $[a,b]$.

Čvorove integracije i težine ćemo odrediti tako da budu egzaktni na polinomima što je moguće većeg stupnja.

Primjer 3: *Neka je zadan interval $I = [-1,1]$ te neka je zadana težinska funkcija $w(x) = 1$. Tražimo formulu slijedećeg oblika:*

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + R_2(f).$$

Vrijednosti težina i čvorova integracije biramo tako da formula bude egzaktna na polinomima što je moguće višeg stupnja.

Rješenje: Uzimamo redom test funkcije $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ i $f_4(x) = x^3$ uvrštavamo ih u integracijsku formulu i zahtijevamo da greška bude 0. Dobije se slijedeće sustav:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 1 \cdot dx &= 2 = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 \\ \int_{-1}^1 x \cdot dx &= 0 = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2 \cdot dx &= \frac{2}{3} = w_1 \cdot x_1^2 + w_2 \cdot x_2^2 \\ \int_{-1}^{1} x^3 \cdot dx &= 0 = w_1 \cdot x_1^3 + w_2 \cdot x_2^3\end{aligned}$$

Problem s gornjim sustavom je što je on nelinearan, ali se ipak može rješiti. Iz druge jednadžbe slijedi $w_1 x_1 = -w_2 x_2$. Kada to uvrstimo u četvrtu jednadžbu dobit ćemo

$$-w_2 x_2 x_1^2 + w_2 x_2^3 = 0 \Rightarrow w_2 x_2 (x_2^2 - x_1^2) = 0.$$

Pokaže se da ni w_2 ni x_2 ne mogu biti 0 (uvrsti i uvjeri se), pa je $x_1^2 = x_2^2$. Sada ponovo slijedi da mora biti $x_1 = -x_2$ jer u suprotnom bi imali da su w_1 i w_2 različitog predznaka a to nije dozvoljeno. Kako je $x_1 = -x_2$ dobijemo da je $w_1 = w_2 = 1$ i $x_1 = -1/\sqrt{3}$ i $x_2 = 1/\sqrt{3}$. Dakle, naša integracijska formula glasi:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3}) + R_2(f).$$

U općem slučaju, da tražimo formulu oblika

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) + R_n(f),$$

trebali bi rješiti nelinearni sustav od $2n$ jednadžbi s $2n$ nepoznanica oblika

$$w_1 x_1^j + w_2 x_2^j + \cdots + w_n x_n^j = \begin{cases} 0, & j = 1, 3, \ldots, 2n-1, \\ \frac{2}{j+1}, & j = 0, 2, \ldots, 2n-2; \end{cases}$$

za $j = 0, \ldots, 2n-1$. △

Ostaje nam pitanje kako odrediti pogrešku, na koje nismo odgovorili, te pitanje kako riješiti sustav koji za iole veći n (n=3,4,...) može predstavljati ozbiljan problem. Stoga je najpametnije prethodni pristup napustiti i odabrati drugi pristup, preko ortogonalnih polinoma.

Na skupu realnih integrabilnih funkcija na intervalu $[a, b]$ uvedemo skalarni produkt s težinskom funkcijom w na slijedeći način: neka su f i g dvije funkcije, njihov skalarni produkt, $< f, g >$, definiran je sa

$$< f, g >= \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx.$$

Lako se provjeri da je ovo stvarno skalarni produkt. Sada odredimo polinome $\varphi_n(x)$, $n \geq 0$, koji su međusobno ortogonalni obzirom na zadani skalarni produkt,

$$< \varphi_i, \varphi_j >= \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \|\varphi_i\|^2 > 0, & i = j. \end{cases}$$

U tu svrhu koristimo Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije, kojeg lagano možemo opisati na slijedeći način:

- Neka je zadan skup $S = \{1, x, \ldots, x^n\}$. Skup S čini bazu u prostoru polinom stupnja manjeg ili jednakog n. Cilj nam je da taj skup ortogonaliziramo.

- $\varphi_0(x) = 1$
- $\varphi_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} < \varphi_k, \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|} > \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}, \quad k = 1, \ldots, n.$

Neka je
$$\varphi_n(x) = A_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$
i neka su njegove nultočke $x_1, \ldots, x_n$. Za njih vrijedi
$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b.$$
Primjetite da smo s A_n označili vodeći koeficijent polinoma φ_n. Sada vrijedi teorem:

Teorem 1 *Za svaki $n \geq 1$ postoji jedinstvena integraciona formula*
$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n}) + R_n(f),$$
reda $2n-1$ (tj. točna na polinomima stupnja $2n-1$). Ako je $f \in C^{(2n)}([a,b])$ tada je
$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j) + \frac{\|\varphi_n\|^2}{A_n^2(2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$
za neki $\xi \in (a,b)$. Čvorovi x_i su nultočke polinoma $\varphi_n(x)$, dok su težine w_i dane sa
$$w_k = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{\|\varphi_{n-1}\|^2}{\varphi_{n-1}(x_k) \cdot \varphi_n'(x_k)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Zadatak 2: *Gramm-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije nađite ortogonalne polinome na $(-1,1)$ sa težinskom funkcijom $w(x) = \sqrt{1-x^2}$. Nadalje, odredite težine i čvorove u integracijskoj (kvadraturnoj) formuli Gaussovog tipa.*

Rješenje: Tražimo parametre slijedeće formule:
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + R_2(f).$$
Iz prethodnog teorema vidimo da trebamo odrediti ortogonalne polinome do stupnja 2, pa ih odredimo.
$$\varphi_0(x) = 1, \quad \|\varphi_0\|^2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot 1^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$
Nadalje,
$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x - < x, \frac{\varphi_0}{\|\varphi_{\|}} > \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|} \\ &= x - \frac{1}{\|\varphi_0\|^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot 1 dx \\ &= x, \end{aligned}$$

jer je funkcija $\sqrt{1-x^2}\cdot x$ neparna, a integral neparne funkcije po simetričnom intervalu je 0. Primjetimo još da je

$$\begin{aligned}
\|\varphi_1\|^2 &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot x^2\,dx = \begin{bmatrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \end{bmatrix} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\cdot\sin^2 t\cdot\cos t\,dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos(2t)}{2}\cdot\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos^2(2t)}{4}\right)dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^2(2t)}{4}\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos(4t)}{8}\,dt \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt - \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(4t)\,dt \\
&= \pi/8.
\end{aligned}$$

Nađimo još i $\varphi_2(x)$.

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= x^2 - <x^2, \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}> \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|} - <x^2, \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}> \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} \\
&= x^2 - \frac{1}{\|\varphi_0\|^2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot x^2\cdot 1\,dx - \frac{1}{\|\varphi_1\|^2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot x^2\cdot x\,dx \\
&= x^2 - \frac{1}{\pi/2}\cdot\frac{\pi}{8} - 0 \\
&= x^2 - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Kada smo odredili ortogonalne polinome možemo nači čvorove: to su nultočke od $\varphi_2(x)$ i u našem slučaju iznose $x_1=-1/2$, $x_2=1/2$. Za naći težine nam trebaju A_2 i A_1 (koeficijenti uz najveću potenciju polinoma φ_2 i φ_1), koji su oboje jednaki 1, te $\|\varphi_1\|^2=\pi/8$, $\varphi_1(x)=x$ i $\varphi_2'(x)=2x$, pa je

$$w_k = \frac{1}{1}\cdot\frac{\pi/8}{x_k\cdot 2x_k} = \frac{\pi}{16x_k^2}.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{\pi}{16(-1/2)^2} = \frac{\pi}{4}, \\
w_2 &= \frac{\pi}{16(1/2)^2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Pogreška je dana sa

$$R_2(f) = \frac{\|\varphi_2\|^2}{A_2^2\cdot 4!}f^{(4)}\xi.$$

Kako je $\|\varphi_2\|^2=\pi/32$ (provjeriti za zadaću!) imamo da je

$$R_2(f) = \frac{\pi/32}{16}f^{(4)}\xi = \frac{\pi}{768}f^{(4)}\xi.$$

△

Zadatak 3: *Istim postupkom kao u prethodnom zadatku, nađite točke i čvorove kao u primjeru. Dakle, težinska funkcija* $w(x) = 1$*, interval je* $[-1, 1]$

Za neke težinske funkcije i odgovarajuće intervale su poznati ortogonalni polinomi i oni imaju svoje ime, što se vidi u slijedećoj tablici:

Ime	Težinska funkcija	Interval
Legendreovi	$w(x) = 1$	$[-1, 1]$
Cebiševljevi	$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$
Laguerrovi	$w(x) = \mathrm{e}^{-x}$	$[0, \infty)$

Težine i nultočke odgovarajućih ortogonalnih polinoma su unaprijed tabelirane i njih onda možemo koristiti. Najčešće se koriste Legendrovi polinomi zbog jednostavnosti svoje težinske funkcije i tada govorimo o Gauss-Legendrovoj integracijskoj formuli itd. Spomenimo još da se za Gauss-Legendrovu integracijsku formulu zna i ocjena pogreške. Ona glasi:

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}\,(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2}\,\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

Što da se radi ukoliko želimo primjeniti neku Gaussovu formulu a nismo na pravom intervalu? Jednostavno se pomoću supstitucije s intervala [a,b] prebacite na interval na pravi interval. Slijedeći zadatak će to pojasniti:

Zadatak 4: *Opišite postupak računanja integrala*

$$\int_a^b f(x)dx$$

korištenjem Gauss-Legendrove integracijske formule.

Rješenje: Neka je

$$g(t) = \frac{b-a}{2}\cdot t + \frac{a+b}{2}$$

bijekcija koja preslikava $[-1, 1]$ na $[a, b]$. Tada vrijedi slijedeće

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt = \frac{b-a}{2}dt \end{array} \right| \\ &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(g(t))dt \\ &= \frac{b-a}{2}\cdot\sum_{i=1}^n w_i f(g(t_i)) + \frac{b-a}{2}R_n(f\circ g). \end{aligned}$$

Općenito je

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2}R_n(f\circ g) &= \frac{b-a}{2}\frac{\|\varphi_n\|^2}{A_n^2(2n!)}(f\circ g)^{2n}(\xi) \\ &= \frac{\|\varphi_n\|^2}{A_n^2(2n!)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} f^{(2n)}(g(\xi)), \end{aligned}$$

što u slučaju Gauss-Legendrove integracijske formule prelazi u

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{2}R_n(f\circ g) &= \frac{2^{2n+1}\,(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} f^{(2n)}(g(\xi)) \\
&= \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}(b-a)^{2n+1}f^{(2n)}(g(\xi)) \\
&\le \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}(b-a)^{2n+1}M_{2n}f,
\end{aligned}$$

gdje je $M_{2n}f$ maksimum $|f^{(2n)}(x)|$ za $x\in[a,b]$. △

Koristeći prethodni zadatak možemo izvesti i produljenu formulu za Gauss-Legendrovu integraciju te ocjenu pogreške. Primjetite da ovo ne možete napraviti sa svim Gaussovim integracijskim formulama (kritična je težinska funkcija w).

Zadatak 5: *Izvedite produljenu formulu za Gauss-Legendrovu integracijsku formulu.*

Rješenje: Tražimo integral funkcije f na intervalu $[a,b]$. Interval $[a,b]$ podijelimo na k jednakih dijelova $[x_{i-1},x_i]$, $x_i=a+i\cdot h$, $h=(b-a)/k$, i na svakom od njih integriramo f koristeći integracijsku formulu. Neka smo definirali funkcije

$$g_i(t)=\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\cdot t+\frac{x_{i-1}+x_i}{2}=\frac{h}{2}\cdot t+\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\qquad i=1,\dots,k.$$

Vrijedi

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}w_jf(g_i(t_j))+\frac{h}{2}R_n^i(f),$$

pa je

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}w_jf(g_i(t_j))+\sum_{i=1}^{k}\frac{h}{2}R_n^i(f)
\end{aligned}$$

Specijalno, za Gauss-Legendrovu formulu imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\frac{h}{2}R_n^i(f) &= \sum_{i=1}^{k}\frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}h^{2n+1}f^{(2n)}(\xi_i) \\
&= \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}h^{2n+1}\sum_{i=1}^{k}f^{(2n)}(\xi_i) \\
&\le \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}h^{2n}(b-a)M_{2n}(f)
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili da je $h\cdot k=b-a$. △

3.4 Metoda neodređenih koeficijenata

Pretpostavimo da za neku funkciju na intervalu $[a,b]$ imamo zadano $f(a)$, $f(b)$ i $f'(a)$. Naš cilj je naći integracijsku formulu koja će koristiti te tri vrijednosti i biti što točnija. Koristimo ponovo istu ideju kao kod Gaussovih formula: naša integracijska formula mora biti točna na polinomima što je moguće višeg stupnja. Dakle, neka je

$$\int_a^b f(x)dx = w_1 \cdot f(a) + w_2 \cdot f(b) + w_3 \cdot f'(a) + R(f),$$

gdje je $R_2(f)$ pogreška, a w_1, w_2 i w_3 su koeficijenti koje treba odrediti. Kako imamo tri nepoznata koeficijenta, trebamo trebamo postaviti barem tri jednadžbe, odnosno naša formula mora biti točna barem na polinomima stupnja 2. Neka su naše test-funkcije 1, x i x^2. imamo redom:

$$\begin{aligned}
\int_a^b 1 \cdot dx &= b - a = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 \\
\int_a^b x \cdot dx &= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = w_1 a + w_2 b + w_3 \\
\int_a^b x^2 \cdot dx &= \frac{b^3}{3} a^3 3 = w_1 \cdot a^2 + w_2 \cdot b^2 + w_3 \cdot 2a
\end{aligned}$$

Uvedemo li oznaku $h = b - a$, tada gornji sustav možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 &= h \\
aw_1 + bw_2 + w_3 &= \frac{h}{2}(b+a) \\
a^2 w_1 + b^2 w_2 + 2aw_3 &= \frac{h}{3}(b^2 + ab + a^2)
\end{aligned}$$

pomnožim prvu jednadžbu sa $-a$ i $-a^2$ i dodam drugoj odnosno trećoj i dobijem

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 &= h \\
hw_2 + w_3 &= \frac{h}{2}(b+a) - ah = \frac{h^2}{2} \\
h(b+a)w_2 + 2aw_3 &= \frac{h}{3}(b^2 + ab + a^2) - a^2 h = \frac{h}{3}(b^2 + ab - 2a^2)
\end{aligned}$$

Pomnožim drugu jednadžbu s $-1/h$ i $-(b+a)$ i dodoam prvoj odnosno trećoj :

$$\begin{aligned}
w_1 - \frac{1}{h} w_3 &= \frac{h}{2} \\
hw_2 + w_3 &= \frac{h^2}{2} \\
-hw_3 &= \frac{h}{3}(b^2 + ab - 2a^2) - \frac{h^2}{2}(b+a) = -\frac{h}{6}\left(b^2 - 2ab + a^2\right) = -\frac{h^3}{6}
\end{aligned}$$

pa je

$$w_3 = \frac{h^2}{6}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{h}{3} \\ w_1 &= \frac{2h}{3}. \end{aligned}$$

Dakle, naša formula ima oblik

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(2f(a) + f(b)) + \frac{h^2}{6}f'(a) + R(f).$$

Ostaje nam naći pogrešku $R_2(f)$ ili je barem ocijeniti. Prisjetimo se Newton-Leibnitzove formule:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

pri čemu je $F'(x) = f(x)$. Promatramo grešku tj.

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}(2f(a) + f(b)) + \frac{h^2}{6}f'(a)$$

i lijevu stranu razvijemo u Taylorov red oko točke a. Pri tome koristimo $F'(x) = f(x)$, $F''(x) = f'(x)$ itd. Nadalje,

$$\begin{aligned} F(b) &= F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + \frac{h^3}{6}F'''(a) + \frac{h^4}{24}F^{(4)}(\xi_1) \\ &= F(a) + hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{6}f''(a) + \frac{h^4}{24}f'''(\xi_1) \\ f(b) &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2). \end{aligned}$$

Kada sve to uvrstimo u izraz za grešku, dobijemo

$$\begin{aligned} R_2(f) &= \left(F(a) + hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{6}f''(a) + \frac{h^4}{24}f'''(\xi_1)\right) - F(a) \\ &\quad -\frac{2h}{3}f(a) - \frac{h^2}{6}f'(a) - \frac{h}{3}\left(f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2)\right) \\ &= \frac{h^4}{24}f'''(\xi_1) - \frac{h^4}{18}f'''(\xi_2) \end{aligned}$$

pa je

$$|R_2(f)| = \left|\frac{h^4}{24}f'''(\xi_1) - \frac{h^4}{18}f'''(\xi_2)\right| \leq \frac{|f'''(\xi_1)|}{24} + \frac{|f'''(\xi_2)|}{18} \leq \frac{7}{72}M_3 f.$$

Na sličan način možemo napraviti razne integracijske formule. Također, možemo izvesti i produljene formule na način analogan onome kod izvođenja produljene trapezne ili produljene Simpsonove formule.

Zadatak 6: *Odredite integracijsku formulu oblika*

$$\int_a^b f(x)dx = w_1 f(a) + w_2 f(b) + w_3 f'(\frac{a+b}{2}) + R(f).$$

Nađite izraz za ocjenu pogreške i pomoću te integracijske formule izračunajte integral

$$\int_1 2\ln x dx.$$